

СПЕКТР СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ И ВОСПРИНИМАЕМАЯ ЧАСТОТА

SPHERICAL WAVE SPECTRUM AND RECEIVED FREQUENCY

Ключевые слова: волна, частота, источник, приемник, спектр.

Keywords: wave, frequency, source, receiver, spectrum.

Аннотация

Установлено, что частота электромагнитной волны, воспринимаемая приемником, не всегда совпадает с частотой излучения. Чем выше излучаемая частота ω_0 и расстояние между источником и приемником, тем больше разница между излучаемой и воспринимаемой частотами. В соответствии с принципом Гюйгенса каждая точка, до которой доходит электромагнитная волна, служит источником вторичных волн. Воспринимаемая частота сферической электромагнитной волны в любом случае меньше исходной частоты излучения и уменьшается по мере удаления от источника, что обуславливается математическими особенностями спектра сферической электромагнитной волны.

Annotation

It was found that the frequency of the electromagnetic wave perceived by the receiver does not always coincide with the frequency of the radiation. The higher the radiated frequency and the distance between the source and receiver, the greater the difference between the radiated and perceived frequencies. According to Huygens' principle, every point reached by an electromagnetic wave serves as a source of secondary waves. The perceived frequency of a spherical electromagnetic wave is in any case less than the initial radiation frequency and decreases with distance from the source, which is due to the mathematical features of the spectrum of a spherical electromagnetic wave.

Павлов Валентин Дмитриевич

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,

Россия, Владимир

старший преподаватель кафедры «Общая и прикладная физика»

pavlov.val.75@mail.ru

Pavlov Valentin Dmitrievich

Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs, Russia, Vladimir

Введение. Воспринимаемая частота

Частота волны, воспринимаемая приемником, не всегда совпадает с частотой излучения. Наиболее распространенным примером тому является эффект Доплера, который, вместе с тем, не является единственно возможной причиной такого несовпадения.

Пусть имеются две волны

$$w_1 = E_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 r)} \text{ и } w_2 = E_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 r)}$$

(для целей настоящего рассмотрения начальная фаза не имеет значения). Их суперпозиция равна

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= E_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 r)} + E_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 r)} = \\ &= E_0 \left[\cos(\omega_1 t - k_1 r) + i \sin(\omega_1 t - k_1 r) + \cos(\omega_2 t - k_2 r) + i \sin(\omega_2 t - k_2 r) \right] = \\ &= E_0 \left\{ \left[\cos(\omega_1 t - k_1 r) + \cos(\omega_2 t - k_2 r) \right] + i \left[\sin(\omega_1 t - k_1 r) + \sin(\omega_2 t - k_2 r) \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \left[2 \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) + (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) - (\omega_2 t - k_2 r)}{2} + \right. \\
&\quad \left. + i 2 \sin \frac{(\omega_1 t - k_1 r) + (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) - (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \right] = \\
&= 2 E_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2) t - (k_1 - k_2) r}{2} \left[\cos \frac{(\omega_1 + \omega_2) t - (k_1 + k_2) r}{2} + i \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2) t - (k_1 + k_2) r}{2} \right] = \\
&= 2 E_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2) t - (k_1 - k_2) r}{2} e^{i \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} r \right)} = E_0 k(\omega, t) e^{i \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} r \right)}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что при суперпозиции волн *воспринимаемая частота* равна промежуточному значению их частот, например, сочетание синего и желтого цвета воспринимается как зеленый.

1. Спектр сферической волны

Электромагнитная волна, излучаемая уединенным точечным источником, является сферической

$$w = \frac{E_0}{r} \sin(\omega_0 t - k_0 r + \varphi_0),$$

где E_0 – амплитуда напряженности электрической составляющей поля на единичном расстоянии от центра волны. Эта сферическая волна в фиксированный момент времени $t = t_1$ представляет собой неподвижную пространственную синусоиду, амплитудно модулированную гиперболой,

$$w_r = \frac{E_0}{r} \sin(\omega_0 t_1 - k_0 r + \varphi_0) = \frac{E_0}{r} \sin(-k_0 r + \varphi_1).$$

Функция

$$f(r) = \frac{\sin k_0 r}{r}$$

не является монохроматической. Для определения ее спектра [1–3] можно воспользоваться табличной функцией косинус-преобразования Фурье. Для этого достаточно выполнить следующие формальные замены:

$$k_0 \rightarrow \omega_0, r \rightarrow t.$$

Для функции

$$f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$$

косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$C_C(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & 0 < \omega < \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0, \end{cases}$$

поэтому функция представима в виде

$$\frac{\sin \omega_0 t}{t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} C_C(\omega) \cos \omega t d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \omega t d\omega = \int_0^{\omega_0} \cos \omega t d\omega.$$

Обратные формальные замены:

$$\omega_0 \rightarrow k_0, t \rightarrow r$$

дают спектр *пространственных* гармоник сферической волны

$$\frac{\sin k_0 r}{r} = \int_0^{k_0} \cos k r dk. \quad (1)$$

Пусть среда распространения волны не является диспергирующей (вакуум). Но тогда спектр *временных* гармоник сферической волны будет пропорционален спектру ее пространственных гармоник

$$\frac{\sin \omega_0 t}{t} = \int_0^{\omega_0} \cos \omega t d\omega.$$

Здесь частоты всех составляющих гармоник меньше ω_0 . Из этого следует, что воспринимаемая частота определяется неравенством $0 < \omega < \omega_0$. Другими словами, воспринимаемая частота сферической волны меньше частоты излучения. Очевидно, что *чем выше излучаемая частота ω_0 и расстояние между источником и приемником, тем больше разница между излучаемой и воспринимаемой частотами.*

Последнее обстоятельство можно записать в виде:

$$\Delta\omega = -C^* \omega_0 r, \quad (2)$$

где C^* – некий коэффициент. Знак « \rightarrow » указывает на уменьшение частоты.

2. Первая формула воспринимаемой частоты сферической волны

В соответствии с принципом Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волна, служит источником вторичных волн, выражение (2) можно записать в дифференциальной форме

$$d\omega = -C\omega dr.$$

Из этого следует

$$\frac{d\omega}{\omega} = -Cdr, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_R^r Cdr, \quad \ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -Cr \Big|_R^r, \quad \ln \omega - \ln \omega_0 = C(R-r), \quad \ln \frac{\omega}{\omega_0} = C(R-r),$$

$$\omega = \omega_0 e^{C(R-r)}. \quad (3)$$

Здесь R – радиус излучающей поверхности, которая принимается сферической.

$$r = R \Rightarrow \omega = \omega_0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0.$$

Выражение (3) – первая формула воспринимаемой частоты сферической волны.

3. Вторая формула воспринимаемой частоты сферической волны. Дифференциал левой части (1) равен

$$df(r) = \frac{k_0 r \cos k_0 r - \sin k_0 r}{r^2} dr.$$

Дифференциал правой, соответственно,

$$df(k) = \cos kr dk.$$

В соответствии с (1)

$$\frac{k_0 r \cos k_0 r - \sin k_0 r}{r^2} dr = \cos kr dk, \quad \int_R^r \frac{k_0 r \cos k_0 r - \sin k_0 r}{r^2} dr = -\int_{k_0}^k \cos kr dk,$$

$$\frac{\sin k_0 r}{r} \Big|_R^r = -\frac{\sin kr}{r} \Big|_{k_0}^k.$$

Знак « \rightarrow » указывает на уменьшение частоты.

$$\frac{\sin k_0 r}{r} - \frac{\sin k_0 R}{R} = -\frac{\sin kr}{r} + \frac{\sin k_0 r}{r}, \quad \frac{\sin k_0 R}{R} = \frac{\sin kr}{r}, \quad k = \frac{1}{r} \arcsin \frac{r \sin k_0 R}{R},$$

$$\omega = \frac{c}{r} \arcsin \frac{r \sin \omega_0 \tau}{R}. \quad (5)$$

$$r = R \Rightarrow \omega = \omega_0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0.$$

Выражение (5) – вторая формула воспринимаемой частоты сферической волны.

Частота ω , начиная с некоторого значения r , будет комплексной. Качественно представить этот феномен можно следующим образом. Если у плоской волны ее фронт не расширяется и поэтому некая локальная область фронта перемещается исключительно в продольном направлении, что ассоциируется с движением по числовой оси, на которой λ – вещественная величина, то у сферической волны ее фронт *расширяется* и поэтому некая локальная область фронта перемещается и в продольном и в поперечном направлении, что ассоциируется с движением в комплексной плоскости, в которой λ – комплексная величина. Тогда в соответствии с формулой

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

ω – тоже комплексная величина.

4. Третья формула воспринимаемой частоты сферической волны

Амплитуда сферической волны на расстоянии r от ее идеализированного точечного источника равна

$$E = \frac{E_0}{r} = \frac{E_0}{ct} \quad (6)$$

Ее дифференциал, соответственно,

$$dE = -\frac{E_0}{ct^2} dt. \quad (7)$$

Величина (6) может быть в соответствии с рисунком представлена следующим образом.

$$E = \frac{E_0}{R} - (r - R) \operatorname{tg} \varphi. \quad (8)$$

Другими словами, $E = f(\varphi)$, т.е. φ является определяющим параметром для E .

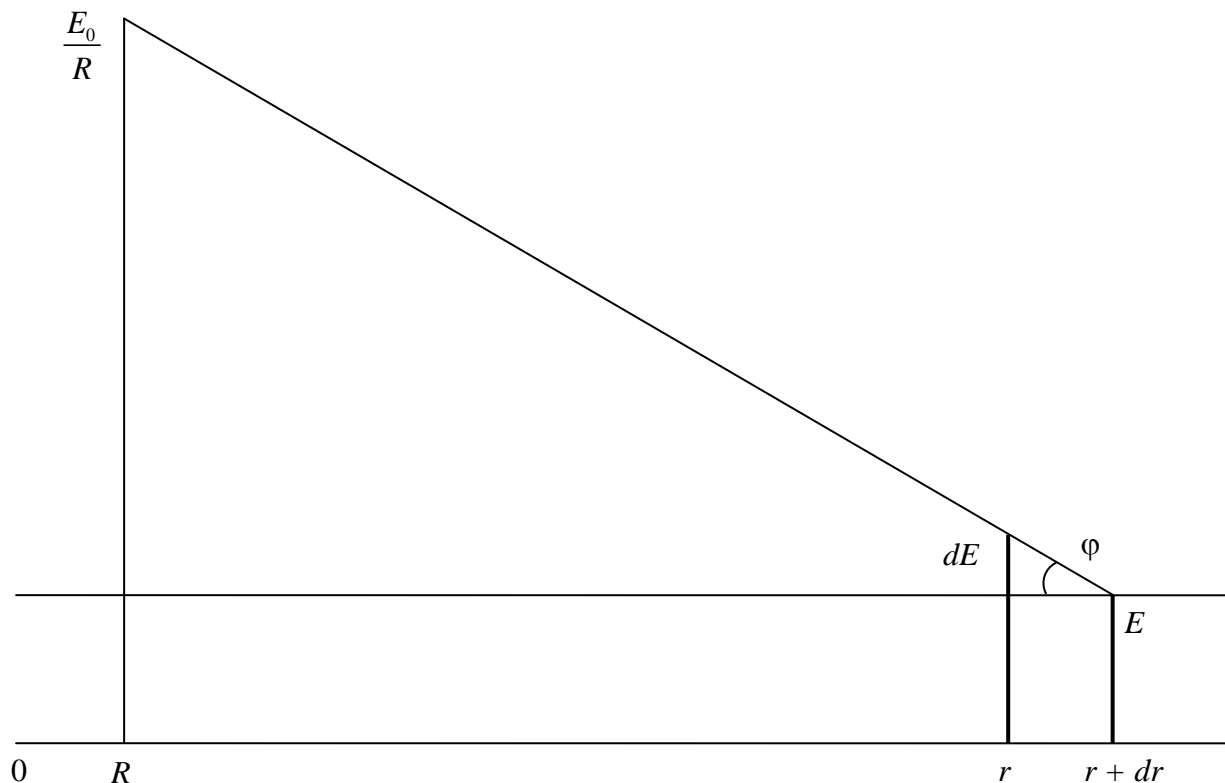


Рисунок – уменьшение амплитуды соответствует ее движению

Из (8) следует

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_0/R - E}{r - R} = \frac{E_0/R - E_0/ct}{ct - R} = E_0 \frac{ct - R}{Rc^2t^2 - R^2ct} = \frac{E_0}{Rct}.$$

С другой стороны –

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{dE}{dr} = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{dt}{dr} = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{1}{v}, \\ v &= -\frac{E_0}{ct^2} \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{E_0}{ct^2} \frac{Rct}{E_0} = -\frac{R}{t} = -\frac{Rc}{r}, \\ dv &= \frac{Rc}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (9)$$

Из полученных выражений следует, что уменьшение амплитуды фронта сферической волны (dE) (который в соответствии с принципом Гюйгенса служит источником вторичных волн) эквивалентно (по отношению к определяющему параметру φ) движению этого фронта со скоростью v в направлении противоположном распространению волны. В этой связи следует учитывать эффект Доплера

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{\gamma(1+v/c)}, \\ \Delta\omega &= \omega - \omega_0 = \frac{\omega_0}{\gamma(1+v/c)} - \omega_0 \approx \omega_0 - \omega_0 - \omega_0 v/c = -\frac{\omega_0}{c} v. \end{aligned}$$

Или в дифференциальной форме

$$d\omega = -\frac{\omega}{c} dv.$$

С учетом (9)

$$\begin{aligned} d\omega &= -\frac{\omega}{c} \frac{Rc}{r^2} dr = -\omega R \frac{dr}{r^2}, \\ \frac{d\omega}{\omega} &= -R \frac{dr}{r^2}, \quad \ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \frac{R}{r} \Big|_R^r, \quad \ln \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{R}{r} - 1, \\ \omega &= \omega_0 e^{\frac{R}{r}-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Полученная формула имеет сходство с (3), действительно,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 e^{\frac{R}{r}-1} = \omega_0 e^{\frac{1}{r}(R-r)}, \\ r = R &\Rightarrow \omega = \omega_0, \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \frac{\omega_0}{e}. \end{aligned}$$

Выражение (10) – третья формула воспринимаемой частоты сферической волны.

Заключение

Выражения для частоты сферической волны (3), (5), (10), полученные на основе различных математических моделей, существенно различаются.

Особенности формул (3), (5), (10) определяют условные границы их применимости. Выражение (3) полезно для понимания физического смысла феномена уменьшения частоты сферической волны. Формула (10) удобна для инженерных расчетов и дает наилучшее наглядное представление о динамике изменения частоты. Выражение (5) лучше всего подходит для верификации практических вычислений, в том числе, оценки их погрешностей.

Воспринимаемая частота сферической волны в любом случае меньше исходной частоты излучения и уменьшается по мере удаления от источника, что обусловливается математическими особенностями спектра сферической волны.

По отклонению частоты, воспринимаемой приемником электромагнитной волны, от исходной частоты излучателя можно оценивать расстояние между ними, что может найти применение в дальней космической навигации.

Полученные результаты следует учитывать при организации систем дальней радиосвязи, в том числе, космической.

Список используемых источников:

1. Лякин Д.В., Мысина Н.Ю., Рябухо В.П. Объем когерентности оптического волнового поля с широкими частотным и угловым спектрами // Оптика и спектроскопия. 2018. Т. 124. № 3. С. 348-358.
2. Кузькин В.М., Переселков С.А. Применение фокусировки обращенного волнового поля для восстановления частотного спектра фоновых внутренних волн // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 6. С. 833-838.
3. Журавлев А.В., Журавлев В.М., Егоров Г.А. Оценивание пространственно-временных спектров волновых процессов на основе последовательности изображений с помощью многомерного метода максимальной энтропии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. № 3 (7). С. 71-81.