

*РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТА
ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВТОРОЙ ЧАСТИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КАТУШКИ*

Б.К. ПОПОВ, О.Б. ПОПОВА, Д.М. ПАНЕШ

*Кубанский государственный технологический университет
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2,
89174811935, электронная почта: pbk47@mail.ru*

Обоснована актуальность математического моделирования электромагнитных устройств и электромагнитных полей. Приведен обзор методов расчёта электромагнитных полей, таких как аналитические методы, вариационные методы, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод сведения полевой задачи к задаче решения системы магнитных цепей. Показан метод расчёта трёхмерного электромагнитного поля катушки методом Фурье.

Ключевые слова: электромагнитное поле, метод конечных элементов, метод Фурье, ряды Фурье.

Проектирование любого электротехнического устройства начинается с изучения профильной литературы и близких патентов на изобретения. После этого изучаются соответствующие методы расчёты проектируемого устройства, его математические модели. В конце концов, разработчик останавливается на приемлемом для него варианте.

Наиболее важным аспектом первоначального исследования проектируемого устройства является его математическая модель. Так как удачный выбор её приводит к успешному результату проектирования.

Основными устройствами электротехнической отрасли, которыми занимаются проектировщики, являются электрические машины, трансформаторы, электрические аппараты, приводимые в действие электромагнитами, устройст-

ва автоматики, основанные на всевозможных электроприводах и т.д. Естественно, учитывая объёмы производства этих изделий, серьёзно стоит проблема их оптимального конструирования, так как необходимо экономить капитальные и эксплуатационные затраты.

Основная масса электротехнических устройств состоит из двух основных конструктивных элементов. Это – катушка возбуждения магнитного поля и магнитопровод, обеспечивающий необходимое преобразование энергии. Например, в трансформаторе происходит преобразование электрической энергии с одними параметрами (током и напряжением) в электрическую энергию с другими параметрами. В электрической машине и электромагните при взаимодействии электрического тока и магнитного потока происходит электромеханическое преобразование энергии, в результате которого осуществляется перемещение механических частей различных технологических устройств. Тут и возникает потребность вычисления электромагнитных параметров проектируемых устройств.

Для многих электротехнических изделий существуют отработанные методы проектирования, базирующиеся на хорошо исследованных математических моделях. Эти исследования носили как аналитический, так и экспериментальный характер, что способствовало их широкому применению в инженерной практике.

В случае разработки инновационных устройств возникают трудности в применении известных методов проектирования, так как приходится применять различные упрощения поставленной задачи, которые приводят к потере точности расчётов, что в свою очередь вызывает принятие неадекватных решений. Качество принятого решения можно повысить применяя экспериментальную проверку, но в нашу эпоху в условиях дефицита времени, финансирования и материальных ресурсов этот путь не эффективен. Наиболее приемлемый путь – это математическое моделирование основных процессов на основании фундаментальных законов точных наук. Это позволяет сократить экспериментальную часть проводимых исследований.

В результате развития вычислительной техники появились системы автоматизированного проектирования (САПР) различных технических устройств. С развитием САПР стало широко применяться математическое моделирование. Современные ЭВМ обладают памятью большого объема, большим быстродействием и развитой периферией. В результате развития САПР появились новые аналитические и численные методы расчета электромагнитных и тепловых полей.

На настоящее время существует множество публикаций, посвященных расчету электромагнитных полей электротехнических устройств. Среди этих книг и статей можно выделить, на наш взгляд, несколько основных направлений. Сюда относятся: аналитические методы для частных случаев, метод конформных преобразований, метод сеток, вариационные методы, метод конечных элементов, метод вторичных источников поля, метод приведения поля к сложной магнитной цепи, а также целый ряд методов, представляющих модификацию или комбинацию вышеизложенных методов. Эти методы подробно изложены в аналитическом обзоре в монографии одного из авторов статьи Б.К. Попова [1].

Одними из первых аналитических методов являются методы Роговского и Рота. Здесь решение получается в виде одинарных или двойных рядов Фурье. Метод применим для прямоугольных границ и для магнитной системы с $\mu = \text{const}$.

Метод конформных преобразований является более действенным аналитическим методом, чем методы Роговского и Рота, так как позволяет учесть влияние границ более сложной формы, чем прямоугольник, но он применим только для двумерных полей и магнитных систем с $\mu = 0$.

Метод сеток или метод конечных разностей позволяет получить численное решение задачи с любыми границами и любой конечной магнитной проницаемостью. Здесь для решения больших систем линейных алгебраических уравнений применяются релаксационный, сверхрелаксационный и итерационный методы.

Вариационные методы, такие как метод Ритца, метод Галеркина, метод Канторовича, сводят задачу решения уравнения Лапласа или Пуассона с любыми граничными условиями к минимизации соответствующего функционала. Метод достаточно общий, но требует больших затрат машинного времени и хорошей математической подготовки для проектировщика.

Метод конечных элементов является развитием вариационных методов. Достоинство его заключается в том, что в отличие от вариационных методов приходится обращаться не полную матрицу, а ленточную, что значительно упрощает расчеты.

Следует также отметить метод вторичных источников поля, являющийся развитием членом-корреспондентом Гринбергом Г. А. метода, предложенного ещё Максвеллом. Метод позволяет решать практически любые задачи технической электродинамики, но требует большого объема оперативной памяти машины и большого быстродействия, а также глубоких математических знаний.

Значительное распространение получил метод сведения поля к разветвленной магнитной цепи, описываемой схемой замещения, но этот метод требует тщательного построения картин магнитного поля в воздушных зазорах.

На наш взгляд наиболее интересен метод, объединяющий аналитические и численные методы. Ранее, одним из авторов был применён метод вторичных источников поля с использованием рядов Фурье и метода Фурье для решения задач в двумерных полях [2 – 14]. Как показала вычислительная практика при числе членов ряда около 100, явление Гиббса не наблюдалось, и результаты расчётов были близки к точным результатам. Это стало понятно после сравнения результатов расчёта по предлагаемой методике с результатами расчёта контрольных примеров.

Поэтому появилось версия о возможности применения методики, разработанной для двумерного случая, к трёхмерному случаю.

Начнём с того, что источником поля в электротехнических устройствах на сегодняшний день, являются катушки с током. Следовательно, если за приемлемое время можно рассчитать с помощью нашей методики электромагнитное

поле в любой точке пространства, то данная методика и для неоднородной задачи может быть применена. Поэтому начнём расчёт электромагнитного поля с помощью нашей методики для цилиндрической катушки.

Решение, как и для двухмерного случая, будем искать для следующей конструкции. В сплошной среде с $\mu = \text{const}$ образуем полость, заполненную воздухом, в виде параллелепипеда. В середину этого параллелепипеда поместим цилиндрическую катушку. Наша задача будет заключаться в том, что надо будет рассчитать электромагнитное поле в любой точке пространства.

В результате проведённых нами исследований была получена формула для определения магнитной индукции, выраженная через векторный магнитный потенциал \bar{A}

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \bar{k}. \quad (1)$$

Из выражения (1) видно, что составляющей по оси y вектора магнитного потенциала \bar{A} не будет, так как нет такой составляющей тока в катушке, а вектор тока и вектор магнитного потенциала параллельны.

Векторный магнитный потенциал \bar{A} выразим в виде тройного ряда Фурье

$$A_x = \sum_{h,k,t} G_{3x} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z, \quad (2)$$

$$A_z = \sum_{h,k,t} G_{5z} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z. \quad (3)$$

В результате проведённых исследований нами была выведена формула для определения

$$G_{z_{h,k,t}} = \frac{8\mu_0 \delta}{l^2 d (m_h^2 + n_k^2 + u_t^2)} \times \left(\frac{\sin n_k c_0 - \sin n_k c}{n_k} \right) \int_0^l \sin u_t z \, dz \int_0^l \frac{(x_0 - x) \cos m_h x}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}} \, dx. \quad (4)$$

где δ – плотность тока в катушке;

l, d – размеры полости;

m_h, n_k, u_t – номера гармоник.

Формула (4) может служить для расчёта поля в диаметральной плоскости, параллельной оси z . Мы ограничились определением $G_{z_{h,k,t}}$, так как была поставлена задача расчёта векторного магнитного потенциала второй части электромагнитной катушки.

Из формулы (4) видно, что интеграл от z не имеет аналитического решения. Поэтому для определения данного интеграла применим формулу в виде тройного шаблона. Исследование использования тройного шаблона в нашей задаче показало его эффективность и точность, так как удалось решить проблему численного интегрирования периодических функций. Решение оказалось в пределах допустимой точности.

С использованием приведённых формул и описанного выше подхода были составлены алгоритмы, а по ним программы вычисления $G_{z_{h,k,t}}$ [15, 16]. В результате проведённых вычислений было выявлено, что работа программы занимает незначительное время, не превышающее пары минут. Картина поля, построенная по результатам вычислений, полностью соответствует физическим представлениям, описанным в литературе. Отсюда вывод, что данная методика подходит для решения трёхмерных задач в неоднородных средах и для любых видов катушек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Б.К. Математическое моделирование магнитных систем грузозахватных устройств на постоянных магнитах: монография/ Б.К. Попов, О.Б. Попова, А.И. Попов; ФГБОУ ВО «КубГТУ», Краснодар, 2017, 100 с.

2. Попов Б.К. Исследование применимости метода вторичных источников при решении краевых задач электромагнитного поля/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2003. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 11.04.03, № 698 – В2003.
3. Попов Б.К. Исследование влияния размеров неоднородности среды на величину вторичных источников при решении краевых задач электромагнитного поля/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2003. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 06.06.03, № 1103 – В2003.
4. Попов Б.К. Определение зависимости вторичных источников поля от среднего значения напряжённости поля на границе раздела сред / Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2004. – 4 с., Деп. в ВИНТИ 08.06.2004, № 970 – В2004.
5. Попов Б.К. Исследование применимости рядов Фурье в методе вторичных источников поля для решения плоскопараллельной неоднородной полевой задачи/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2004. – 6 с., Деп. в ВИНТИ 12.10.04, № 1592 – В2004.
6. Попов Б.К. Вывод формулы для определения величины и знака вторичных источников поля/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2004. – 4 с., – Деп. в ВИНТИ 08.12.04, № 1962 – В 2004.
7. Попов Б.К. Исследование применимости интеграла Фурье в методе вторичных источников поля для решения неоднородной плоскопараллельной полевой задачи/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2004. – 5 с., – Деп. в ВИНТИ 15.12.04, № 2001 – В2004.
8. Попов Б.К. Приведение бесконечного числа последовательных приближений к конечному аналитическому выражению при решении полевой задачи с помощью интеграла Фурье/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2005. – 7 с., – Деп. в ВИНТИ 10.10.05, № 1290 – В2005.
9. Попов Б.К. Расчёт методом Роговского магнитного поля двух шин прямоугольного сечения со встречно направленными токами в прямоугольной области, окружённой ферромагнетиком с бесконечной магнитной проницаемостью/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2007. – 11 с.: ил., Деп. в ВИНТИ 23.03.07, № 285 – В2007.

10. Попов Б.К. Расчёт методом Рота магнитного поля двух шин прямоугольного сечения со встречно направленными токами в прямоугольной области, окружённой ферромагнетиком с бесконечной магнитной проницаемостью/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2007. – 7 с.: ил., Деп. в ВИНТИ 23.03.07, № 287 – В2007.
11. Попов Б.К. Вывод формулы для определения величины и знака вторичных источников поля в виде поверхностных токов/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2007. – 7 с., Деп. в ВИНТИ 23.03.07, № 286 – В2007.
12. Попов Б.К. Расчёт магнитного поля двух шин прямоугольного сечения со встречно направленными токами в кусочно-неоднородной прямоугольной области, окружённой ферромагнетиком с бесконечной магнитной проницаемостью/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2007. – 9 с., Деп. в ВИНТИ 02.05.07, № 485 – В2007
13. Попов Б.К. Решение полевых задач электротехники с помощью вторичных источников поля и рядов Фурье/ Б.К. Попов, О.Б. Попова; Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №09(093). – IDA [article ID]: 0931309040. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/40.pdf>.
14. Попов Б.К. Учёт неоднородности среды при расчёте магнитного поля/ Б.К. Попов, О.Б. Попова; Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401052. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/52.pdf>.
15. Попов Б.К. Вычисление члена ряда Фурье для векторного магнитного потенциала катушки по оси Z/ Б.К. Попов, О.Б. Попова; СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2014619337, зарегистрировано 15.09.14.

16. Попов Б.К. Модифицированное вычисление члена ряда Фурье для векторного магнитного потенциала катушки по оси Z/ Б.К. Попов, О.Б. Попова; СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2014619542, зарегистрировано 18.09.14.

REFERENCES

1. Popov B.K. Matematicheskoye modelirovaniye magnitnykh sistem gruzozakhvatnykh ustroystv na postoyannykh magnitakh: monografiya/ B.K. Popov, O.B. Popova, A.I. Popov; FGBOU VO «KubGTU», Krasnodar, 2017, 100 s.
2. Popov B.K. Issledovaniye primenimosti metoda vtorichnykh istochnikov prireshenii krayevykh zadach elektromagnitnogo polya/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2003. – 15 s. – Dep. v VINITI 11.04.03, № 698 – V2003.
3. Popov B.K. Issledovaniye vliyaniya razmerov neodnorodnosti sredy na velichinu vtorichnykh istochnikov pri reshenii krayevykh zadach elektromagnitnogo polya/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2003. – 9 s. – Dep. v VINITI 06.06.03, № 1103 – V2003.
4. Popov B.K. Opredeleniye zavisimosti vtorichnykh istochnikov polya ot srednego znacheniya napryazhonnosti polya na granitse razdela sred / Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2004. – 4 s., Dep. v VINITI 08.06.2004, № 970 – V2004.
5. Popov B.K. Issledovaniye primenimosti ryadov Fur'ye v metode vtorichnykh istochnikov polya dlya resheniya ploskoparallel'noy neodnorodnoy polevoy zadachi/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2004. – 6 s., Dep. v VINITI 12.10.04, № 1592 – V2004.
6. Popov B.K. Vyvod formuly dlya opredeleniya velichiny i znaka vtorichnykh istochnikov polya/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2004. – 4 s., – Dep. v VINITI 08.12.04, № 1962 – V 2004.
7. Popov B.K. Issledovaniye primenimosti integrala Fur'ye v metode vtorichnykh istochnikov polya dlya resheniya neodnorodnoy ploskoparallel'noy polevoy zadachi/

Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2004. – 5 s., – Dep. v VINITI 15.12.04, № 2001 – V2004.

8. Popov B.K. Privedeniye beskonechnogo chisla posledovatel'nykh priblizheniy k konechnomu analiticheskomu vyrazheniyu pri reshenii polevoy zadachi s pomoshch'yu integrala Fur'ye/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2005. – 7 s., – Dep. v VINITI 10.10.05, № 1290 – V2005.

9. Popov B.K. Raschot metodom Rogovskogo magnitnogo polya dvukh shin pryamougol'nogo secheniya so vstrechno napravlennymi tokami v pryamougol'noy oblasti, okruzhonnoy ferromagnetikom s beskonechnoy magnitnoy pronitsayemost'yu/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2007. – 11 s.: il., Dep. v VINITI 23.03.07, № 285 – V2007.

10. Popov B.K. Raschot metodom Rotamagnitnogo polya dvukh shin pryamougol'nogo secheniya so vstrechno napravlennymi tokami v pryamougol'noy oblasti, okruzhonnoy ferromagnetikom s beskonechnoy magnitnoy pronitsayemost'yu/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2007. – 7 s.: il., Dep. v VINITI 23.03.07, № 287 – V2007.

11. Popov B.K. Vyvod formuly dlya opredeleniya velichiny i znaka vtorichnykh istochnikov polya v vide poverkhnostnykh tokov/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2007. – 7 s., Dep. v VINITI 23.03.07, № 286 – V2007.

12. Popov B.K. Raschot magnitnogo polya dvukh shin pryamougol'nogo secheniya so vstrechnonapravlennymi tokami v kusochno-neodnorodnoy pryamougol'noy oblasti, okruzhonnoy ferromagnetikom s beskonechnoy magnitnoy pronitsayemost'yu/ Kuban. gos. tekhnol. un-t. – Krasnodar, 2007. – 9 s., Dep. v VINITI 02.05.07, № 485 – V2007.

13. Popov B.K. Resheniye polevykh zadach elektrotekhniki s pomoshch'yu vtorichnykh istochnikov polya i ryadov Fur'ye/ B.K. Popov, O.B. Popova; Politematicheskiy setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogouniversiteta (Nauchnyy zhurnal KubGAU) [Elektronnyyresurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №09(093). – IDA [article ID]: 0931309040. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/40.pdf>.

- 14 Popov B.K. Uchot neodnorodnosti sredy pri raschote magnitnogo polya/ B.K. Popov, O.B. Popova; Politematicheskii setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyy zhurnal KubGAU) [Elektronnyy resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401052. – Rezhimdostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/52.pdf>.
15. Popov B.K. Vychisleniye chlena ryada Fur'ye dlya vektornogo magnitnogo potentsiala katushki po osi Z/ B.K. Popov, O.B. Popova; SVIDETEL'STVO o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM 2014619337, zaregistrirovano 15.09.14.
16. Popov B.K. Modifitsirovannoye vychisleniye chlena ryada Fur'ye dlya vektornogo magnitnogo potentsiala katushki po osi Z/ B.K. Popov, O.B. Popova; SVIDETEL'STVO o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM 2014619542, zaregistrirovano 18.09.14.

*DEVELOPMENT OF THE SOFTWARE FOR CALCULATION VECTOR
MAGNETIC POTENTIAL OF THE SECOND PART ELECTROMAGNETIC COILS*

B.K. POPOV, O.B. POPOVA, D.M. PANESH

Kuban State Technological University

350072, Russian Federation, Krasnodar, ul. Moscow, 2,

89184811935, e-mail: pbk47@mail.ru

The urgency of mathematical modeling of electromagnetic devices and electromagnetic fields is grounded. A review is given of methods for calculating electromagnetic fields, such as analytical methods, variational methods, the finite difference method, the finite element method, the method of reducing the field problem to the problem of solving a system of magnetic circuits. A method for calculating the three-dimensional electromagnetic field of a coil by the Fourier method is shown.

Key words: electromagnetic field, finite element method, Fourier method, Fourier series.