Физико-математические науки

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[4]

Р. М. Кумышев, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия), e-mail: kumyshev1974@mail.ru

Аннотация. Исследована краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Вопрос разрешимости при определенных условиях редуцирован к исследованию системы алгебраических уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, нагруженное уравнение, краевая задача, функция Грина, система алгебраических уравнений.

В последние годы продолжается интенсивное исследование нагруженных уравнений [2-4], связанное, в частности, с различными приложениями задач, ассоциированных с этими уравнениями. К ним относятся, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, моделирование процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления.

Термин «нагруженное уравнение» впервые появился в работах применительно к интегральным уравнениям[1].

Рассмотрим нагруженное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''(x)-\lambda y(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i) = f(x), \tag{1}$$

где $\lambda,\lambda_i(i=1,\overline{n})$ - некоторые постоянные, причём $\lambda\neq 0, \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\neq 0,$ а $x_i(i=1,\overline{n})$ - фиксированные точки из интервала $(0;1)$; для определённости будем считать, что

$$0<x_i<x_2<\ldots<x_n<1.$$

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной на всем отрезке $(0;1)$.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу: определить регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям: $y(0)=y(1)=0$. (2)

Теорема. Задача (1) - (2) имеет единственное регулярное решение тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i sh\frac{\sqrt{\lambda}x_i}{2}sh\frac{\sqrt{\lambda}(1-x_i)}{2}\neq\frac{\lambda}{2}ch\frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \lambda>0, \tag{3}$$

---

[4] Статья представлена магистром социальной работы Т. М. Хусяиновым (Нижний Новгород, Россия). Рецензент: Кумыков Тембулат Сарабиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов ФГБНУ «Институт прикладной математики и автоматизации» (Нальчик, Россия).

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sin\frac{\sqrt{-\lambda}x_i}{2}\sin\frac{\sqrt{-\lambda}(1-x_i)}{2} \neq -\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}, \lambda<0. \quad (4)$$

Запишем уравнение (1) в виде:

$$y''(x)-\lambda y(x) = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)+f(x). \quad (5)$$

Выясним сначала, существует ли функция Грина для оператора

$$Ly = y''(x)-\lambda y(x) \quad (6)$$

с краевыми условиями (2).

Сначала рассмотрим случай $\lambda>0$. Очевидно, что $y_1(x)=e^{-\sqrt{\lambda}x}, y_2(x)=e^{\sqrt{\lambda}x}$ есть фундаментальная система решений уравнения

$$y''(x)-\lambda y(x)=0, \quad (7)$$

общее решение которого можно представить в виде

$$y(x)=c_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{\lambda}x}. \quad (8)$$

В случай $\lambda<0$ фундаментальная система решений уравнения (7) имеет вид: $y_1(x)=\cos\sqrt{-\lambda}x,\ y_2(x)=\sin\sqrt{-\lambda}x$, а общее решение $y(x)=\cos\sqrt{-\lambda}x+\sin\sqrt{-\lambda}x$.

Нетрудно заметить, что функция Грина задачи (2) для оператора $Ly \equiv y''' - \lambda y$ при $\lambda>0$ имеет вид:

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{-sh\sqrt{\lambda}(1-x)sh\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}}, & 0\le t\le x,\\[2ex] \dfrac{-sh\sqrt{\lambda}x\cdot sh\sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}}, & x\le t\le 1.\end{cases} \quad (9)$$

а при $\lambda<0$:

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{-\sin\sqrt{-\lambda}\cdot\sin\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}}, & 0\le t\le x,\\[2ex] \dfrac{-\sin\sqrt{-\lambda}x\cdot\sin\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}}, & x\le t\le 1.\end{cases} \quad (10)$$

Считая известной правую часть уравнения (5) и используя (15), запишем его решение в виде: $y(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)dt-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)\int_0^1 G(x,t)dt$. (11)

Обозначим $\beta(x)=\int_0^1 G(x,t)dt$, $\gamma(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)dt,$ (12)

С учетом (12) выражение (11) принимает вид:

$$y(x)+\beta(x)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)=\gamma(x). \quad (13)$$

Элементарными вычислениями легко показать, что:

$$\beta(x)=\int_0^1 G(x,t)dt=\begin{cases}\dfrac{-2sh\dfrac{\sqrt{\lambda}x}{2}\,sh\dfrac{\sqrt{\lambda}(1-x)}{2}}{\lambda ch\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2}},\lambda>0\\ \dfrac{2\sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}x}{2}\sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}(1-x)}{2}}{\lambda\cos\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{2}},\lambda<0\end{cases} \tag{14}$$

В выражении (13) придавая значения $x=x_1,\quad x=x_2,\quad \dots,\quad x=x_n$:

$$\begin{cases}y(x_1)+\beta(x_1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)=\gamma(x_1)\\ y(x_2)+\beta(x_2)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)=\gamma(x_2)\\ y(x_3)+\beta(x_3)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y(x_i)=\gamma(x_3)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y(x_n)+\beta(x_n)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, y(x_i)=\gamma(x_n).\end{cases} \tag{15}$$

Ведем обозначения $y_i=y(x_i),\ \beta_i=\beta(x_i),\ \gamma_i=\gamma(x_i).$ (16)

С учетом (16) система (15) принимает вид:

$$\begin{cases}y_1+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\gamma_1\\ y_2+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\gamma_2\\ y_3+\beta_3\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\gamma_3\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n+\beta_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\gamma_n,\end{cases} \tag{17}$$

или в более развернутом виде:

$$\begin{cases}y_1+\beta_1(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3+\dots+\lambda_n y_n)=\gamma_1\\ y_2+\beta_2(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3+\dots+\lambda_n y_n)=\gamma_2\\ y_3+\beta_3(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3+\dots+\lambda_n y_n)=\gamma_3\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n+\beta_n(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3+\dots+\lambda_n y_n)=\gamma_n.\end{cases} \tag{18}$$

Выражение (18) – есть линейная алгебраическая система из n-неизвестных. С помощью элементарных преобразований запишем последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} (1+\lambda_1\beta_1)y_1+\lambda_2\beta_1 y_2+\lambda_3\beta_1 y_3+\ldots+\lambda_n\beta_1 y_n=\gamma_1 \\ \lambda_1\beta_2 y_1+(1+\lambda_2\beta_2)y_2+\lambda_3\beta_2 y_3+\ldots+\lambda_n\beta_2 y_n=\gamma_2 \\ \lambda_1\beta_3 y_1+\lambda_2\beta_3 y_2+(1+\lambda_3\beta_3)y_3+\ldots+\lambda_n\beta_3 y_n=\gamma_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\beta_n y_1+\lambda_2\beta_n y_2+\lambda_3\beta_n y_3+\ldots+(1+\lambda_n\beta_n)y_n=\gamma_n. \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) имеет единственное решение, если

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1\beta_1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 & \ldots & \lambda_n\beta_1 \\ \lambda_1\beta_2 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 & \ldots & \lambda_n\beta_2 \\ \lambda_1\beta_3 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 & \ldots & \lambda_n\beta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1\beta_n & \lambda_2\beta_n & \lambda_3\beta_n & \ldots & 1+\lambda_n\beta_n \end{vmatrix}\neq 0. \tag{20}$$

Используя известные свойства определителей, методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta_n=1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\beta_i\,. \tag{21}$$

Действительно, при $n=1$: $\Delta_1=1+\lambda_1\beta_1$; при $n=2$:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1\beta_1 & \lambda_2\beta_1 \\ \lambda_1\beta_2 & 1+\lambda_2\beta_2 \end{vmatrix}=1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_1\lambda_2\beta_1\beta_2-\lambda_1\lambda_2\beta_1\beta_2=1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2;$$

при $n=3$:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1\beta_1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 \\ \lambda_1\beta_2 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 \\ \lambda_1\beta_3 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 \\ 0 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 \\ 0 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \lambda_1\beta_1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 \\ \lambda_1\beta_2 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 \\ \lambda_1\beta_3 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 \end{vmatrix}=1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3; \tag{22}$$

при $n=k$:

$$\Delta_k=1+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\beta_i\,. \tag{23}$$

Перейдем к разрешимости системы (19). Найдем все неглавные определители данной системы:

$$\Delta_n^1=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 & \ldots & \lambda_n\beta_1 \\ \gamma_2 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 & \ldots & \lambda_n\beta_2 \\ \gamma_3 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 & \ldots & \lambda_n\beta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_n & \lambda_2\beta_n & \lambda_3\beta_n & \ldots & 1+\lambda_n\beta_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n^2=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1\beta_1 & \gamma_1 & \lambda_3\beta_1 & \ldots & \lambda_n\beta_1 \\ \lambda_1\beta_2 & \gamma_2 & \lambda_3\beta_2 & \ldots & \lambda_n\beta_2 \\ \lambda_1\beta_3 & \gamma_3 & 1+\lambda_3\beta_3 & \ldots & \lambda_n\beta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1\beta_n & \gamma_n & \lambda_3\beta_n & \ldots & 1+\lambda_n\beta_n \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_n^n = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1\beta_1 & \lambda_2\beta_1 & \lambda_3\beta_1 & \ldots & \gamma_1 \\ \lambda_1\beta_2 & 1+\lambda_2\beta_2 & \lambda_3\beta_2 & \ldots & \gamma_2 \\ \lambda_1\beta_3 & \lambda_2\beta_3 & 1+\lambda_3\beta_3 & \ldots & \gamma_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1\beta_n & \lambda_2\beta_n & \lambda_3\beta_n & \ldots & \gamma_n \end{vmatrix}.$$

Решения системы (19) определяются по формулам:

$$y_1 = \frac{\Delta_n^1}{\Delta_n};\ y_2 = \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n};\ y_3 = \frac{\Delta_n^3}{\Delta_n};\ \ldots,\ y_n = \frac{\Delta_n^n}{\Delta_n}, \qquad (24)$$

или с учетом (21)

$$y_1 = \frac{\Delta_n^1}{1+\sum_{i=1}^n \lambda_i\beta_i};\ y_2 = \frac{\Delta_n^2}{1+\sum_{i=1}^n \lambda_i\beta_i};\ y_3 = \frac{\Delta_n^3}{1+\sum_{i=1}^n \lambda_i\beta_i};\ \ldots,\ y_n = \frac{\Delta_n^n}{1+\sum_{i=1}^n \lambda_i\beta_i}. \qquad (25)$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta_n^{(i,j)} = \begin{cases} 1+\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^n \lambda_k\beta_k, i=j, \\ -\lambda_i\beta_i, i\neq j, \end{cases} \qquad (26)$$

где $\Delta_n^{(i,j)}$ - алгебраическое дополнение элемента *i*-ой строки и *j*-го столбца в определителе Δ_n. Так как $$y(x_i) = \frac{1}{\Delta_n}\sum_{i=1}^n \Delta_n^{(i,j)}\gamma(x_j), i=1,\overline{n}, \qquad (27)$$

то из равенства (26) получаем (при $\Delta_n \neq 0$):

$$y(x_i) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^n \lambda_j\beta_j}\left(\gamma_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \beta_j(\gamma_i\lambda_j - \lambda_i\gamma_j)\right). \qquad (28)$$

Теорема доказана.

Литература:

1. Кумышев Р.М.О разрешимости краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения. //ФƏн-наука. 2015. №4 (43). С. 6-8.

2. Нахушев А.М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения // Труды Всесоюзного симпозиума в Тбилиси, 21-23 апреля 1982 г. С. 183-188.

3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения // Дифференц. Уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86-94.

4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. Уравнения. 1982. Т.18, № 1. С.72-81.

Kumyshev R.M. O razreshimosti odnoj kraevoj zadachi dlja nagruzhennogo obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka // Nauka. Mysl'. - №12. – 2015.

— • —

Abstract. The boundary value problem for the second order differential equation has been studied. The question on solvability at given conditions has been reduced to the investigation of a system of algebraic equations.

Keywords: differential equation, loaded equation, boundary value problem, Green function, system of algebraic equations.

.— • —

Сведения об авторе

Радион Музаринович **Кумышев**, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова.

— • —

Подписано в печать 13.12.2015.