<u>**Физико-математические науки**</u>

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА[1]

Р. М. Кумышев, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия)
e-mail: kumyshev1974@mail.ru

Аннотация. Исследована краевая задача для гиперболо-параболического уравнения второго порядка. Вопрос разрешимости редуцирован к исследованию разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, уравнение смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов, интегро-дифференциальное уравнение.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению нестандартных начально – краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике.

Возникшие в приложениях проблемы, в частности проблемы околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики [3-4], без моментной теории оболочек и другие [1] привели к систематическому изучению уравнений смешанного типа с разрывными условиями сопряжения.

Первые фундаментальные исследования уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа были выполнены Ф. Трикоми [5-6] и С. Геллерстедтом [7].

Если первоначально изучались преимущественно уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, то в настоящее время понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов обусловлено тем, что с одной стороны новые типы смешанных уравнений еще мало исследованы в теоретическом плане, а с другой, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

В последние годы продолжается интенсивное исследование нагруженных уравнений [2], связанное, в частности, с различными приложениями задач, ассоциированных с этими уравнениями. К последним относятся, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и

[1] Статья представлена магистром социальной работы Т. М. Хусяиновым (Нижний Новгород, Россия). Рецензент: Кумыков Тембулат Сарабиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов ФГБНУ «Институт прикладной математики и автоматизации» (Нальчик, Россия).

почвенной влаги, моделирование процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления.

Термин «нагруженное уравнение» впервые появился в работах применительно к интегральным уравнениям.

В данной статье для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа изучена краевая задача. Разрешимость рассматриваемых задач сведена к исследованию интегрального уравнения Фредгольма.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup I \subset R^2$ - конечная область, где $\Omega_1 = \{(x,t) 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ и Ω_2 - область, лежащая в полуплоскости $t < 0$ и ограниченная прямыми $OC: x + t = 0, BC: x - t = 1, O(0,0), B(1,0)$ и $I = \{t = 0 : 0 < x < 1\}, C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

В области Ω рассмотрим нагруженное гиперболо-параболическое уравнение второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t + \lambda_1 u(x,0), t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} + \lambda_2 u(x,0), t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\lambda_i (i = 1,2)$- постоянные. Уравнение (1) – гиперболо-параболическое уравнение с характеристической линией изменения типа, исследованию краевых задач для которых посвящены многие работы.

Найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u = u(x,t)$ с непрерывными в Ω производными u_x и u_t, являющуюся регулярным решением уравнения (1) в $\bigcup_{i=1}^{2} \Omega_i$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \varphi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u|_{oc} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

где $\varphi_0(t), \quad \varphi_1(t) \in C[0,T], \quad \psi(x)$-дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

Полагая $u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x)$, исходя из условий задачи при $t \to 0+$, получаем функциональное соотношение:

$$\tau''(x) - \nu(x) + \lambda_1 \tau(x) = 0. \qquad (4)$$

Решение задачи в области Ω_2 ищем в виде

$$u(x,t) = F(x+t) + \Phi(x-t) - \frac{\lambda_2}{4} \int_0^{x+t} d\xi \int_1^{x-t} \tau\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) d\eta, \qquad (5)$$

где $F(x)$ и $\Phi(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

На основании (3) из (5) находим $\Phi(x) = \Psi\left(\frac{x}{2}\right) - F(0), \quad 0 \le x \le 1$; в итоге выражение (5) принимает вид:

$$u(x,t) = F(x+t) + \Psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - F(0) - \frac{\lambda_2}{4} \int_0^{x+t} d\xi \int_1^{x-t} \tau\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) d\eta. \qquad (6)$$

Продифференцировав (6) последовательно сначала по x, затем по переменной t и переходя в полученных производных u_x и u_t к пределу при $t \to 0$-, получаем интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на I из гиперболической части Ω_2

$$\nu(x) - \tau'(x) = -\Psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\lambda_2}{2}\int_0^x \tau\left(\frac{\xi + x}{2}\right) d\xi \,. \qquad (7)$$

Принимая во внимание (4) и (7), нетрудно видеть, что задача эквивалентна следующей двухточечной задаче Дирихле:

$$\tau(0) = \varphi_0(0),\ \tau(1) = \varphi_1(0) \qquad (8)$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$\tau''(x) - \tau'(x) + \lambda_1 \tau(x) = \lambda_2 \int_{x/2}^{x} \tau(\xi) d\xi - \Psi'\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (9)$$

Задача (8), (9) допускает интегральное представление решения в виде

$$\tau(x) = \Phi_0(x) + \lambda_2 \int_0^1 \tau(\xi) K(x,\xi) d\xi \,, \qquad (10)$$

где

$$\Phi_0(x) = \varphi_0(0) + x[\varphi_1(0) - \varphi_0(0)] - \int_0^1 \Psi'\left(\frac{t}{2}\right) G(x,t) dt + \int_0^1 G(x,t)\{(t\lambda_1 - 1)[\varphi_1(0) - \varphi_0(0)] +$$

$$+ \lambda_1 \varphi_0(0)\} dt \,,\ \Phi_0(x) \in C[0,1],$$

$G(x,t)$ - функция Грина задачи (8), (9), которая при $\lambda_1 < \frac{1}{4}$ существует.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (10) имеет лишь тривиальное решение, если λ_2 не является корнем уравнения $D(\lambda_2) = 0$, где $D(\lambda_2)$- определитель Фредгольма непрерывного ядра $K(x,\xi)$ и, следовательно, уравнение (10) имеет решение.

Литература:

1. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1990. – 208 с.

2. Нахушев А.М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. – Нальчик: Эльбрус. 1992. – 155 с.

3. Франкль Ф.И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе // Вестник ЛГУ. Серия матем., мех. и астр. – 1951. – т.6. - №11. – с. 3-7.

4. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Известия АН СССР. Серия матем. – 1945. – т.6. - №2. – с. 121 – 242.

5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат. 1947. – 190 с.

6. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.:ИЛ, 1957. –

444 с.
7. Gellerstedt S. Quelqurs problems mixtes pours l'equation // Arkiv for Mat., Astr Osh Fis. – 1936. – bd. 26 A. - №3. – p. 1-32.

Kumyshev R.M. O razreshimosti kraevoj zadachi dlja nagruzhennogo uravnenija smeshannogo tipa // Nauka. Mysl'. - № 8. – 2015.

– • –

Abstract. The boundary value problem for the second order hyperbolic-parabolic equation has been analyzed. The question on the solvability has been reduced to the investigation of resolvability of the second order Fredholm integral equation.

Keywords: equations of mixed type; Dirichlet problem, equation of mixed elliptic-hyperbolic and parabolic-hyperbolic types, integral-differential equations.

– • –

Сведения об авторе

Радион Музаринович **Кумышев**, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова.

– • –

Подписано в печать 10.11.2015.