Физико-математические науки

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ ЛИНИЕЙ ПЕРЕХОДА[3]

Р.М. Кумышев, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия), e-mail: kumyshev1974@mail.ru

Аннотация Исследована краевая задача для параболического уравнения третьего порядка. Вопрос разрешимости при определенных условиях редуцирован к исследованию систем интегральных уравнений.

Ключевые слова: регулярное решение, непрерывно-дифференцируемая функция, краевая задача, система интегральных уравнений Вольтерра.

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов, началось в семидесятые годы и интенсивно развивается в работах Т.Д. Джураева[1]. Необходимо отметить, что некоторые прикладные задачи приводятся к рассмотрению уравнений третьего порядка с частными производными. В частности, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных гиперболического типа третьего порядка. Изучение краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков привлекали внимание многих исследователей . С недавнего времени интерес многих математиков вызывают уравнения смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа. Первые упоминания о таких уравнения можно наблюдать в работах [2]-[3].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-u_y\right)+w_i(x,y)u=0,\ \ (i=1,2) \tag{1}$$

в области $D=D_1\cup D_2\cup J$, где

$$D_1=\{(x,y):0<x<l,0<y<T\}$$
$$D_2=\{(x,y):-1<x<0,0<y<1\}$$
$$J=\{(x,y):x=0,0<y<1\}$$

$w_i(x,y)\ i=1,2$ непрерывно-дифференцируемая функция.

Задача1. Требуется найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ \ (0\le x\le 1) \tag{2}$$

---

[3] Статья представлена магистром социальной работы Т. М. Хусяиновым (Нижний Новгород, Россия). Рецензент: Кумыков Тембулат Сарабиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов ФГБНУ «Институт прикладной математики и автоматизации» (Нальчик, Россия).

$$u(x,0)=\psi_2(x),\ (-1\le x\le 0) \tag{3}$$

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\ (0\le y\le 1) \tag{4}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ (0\le y\le 1) \tag{5}$$

$$u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ (0\le y\le 1) \tag{6}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\ (0\le y\le 1) \tag{7}$$

и условиям склеивания

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y)$$

$$u_x(-0,y)=u(+0,y)=\nu(y)$$

Для нахождения решения задачи в областях $D=D_1\cup D_2$, интегрируя уравнение (1) от 0 до x получим

$$u_{xx}-u_y+\int_0^x c_1(t,y)u(t,y)dt=w_1(y)\ в\ D_1 \tag{8}$$

$$u_{xx}-u_y+\int_0^x c_2(t,y)u(t,y)dt=w_2(y)\ в\ D_2 \tag{9}$$

Решая в области D_1 первую краевую задачу для уравнения (8), убеждаемся, что решение D_1 удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^y K_1(x,y,\eta)w_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^1 K_2(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi \tag{10}$$

где $u_0(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\tau(\eta)d\eta+F(x,y)$

$$F(x,y)=\int_0^1 G(x,y,\xi,0)\psi_1(\xi)\,d\xi-\int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta,$$

$$K_1(x,y,\eta)=\int_0^1 |\,G(x,y,\xi,\eta)d\xi$$

$$K_1(x,y,\eta)=\int_0^\xi w_1(t,\eta)G(x,y,\xi,\eta)dt$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

решение которого можно выписать через резольвенту $R(x,y,\xi,\eta)$ ядра

$$\int_0^\xi w_1(t,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\eta$$

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^y K_3(x,y,\eta)w_1(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^1 R(x,y,\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\xi \tag{11}$$

где $K_3(x,y,\eta)w_1(\eta)=K_1(x,y,\eta)-\int_0^1 R(x,y,\xi',\eta')d\eta'\int_0^1 K_1(\xi,\eta,\xi',\eta')d\xi'$

Отсюда дифференцируя по x и переходя к пределу при $x\to+0$, получим соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$

$$v(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau'(t)}{\sqrt{y-t}}dt-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{K(y,t)}{\sqrt{y-t}}\tau'(t)dt+\int_0^y\Phi_1(y,t)\tau(t)dt+\int_0^y K_{3x}(0,y,\eta)d\eta+P_1(y) \quad (12)$$

где $K(y,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-t})$

$$\Phi_1(y,t)=\int_0^y d\eta'\int_0^1 R_x(0,y,\xi',\eta')\,|\,G_\xi(\xi',\eta',0,t)d\xi'$$

$$P_2(y)=V_x(0,y)-\psi_1(0)\frac{1+K(y,0)}{\sqrt{\pi y}}+\int_0^y d\eta\int_0^1 R_x(0,y,\xi,\eta)\,|\,V(\xi,\eta)d\xi$$

Аналогичное соотношение можно получить между $\tau(y)$ и $v(y)$ перенесённое из области D_1

$$v(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau'(t)}{\sqrt{y-t}}dt+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{K(y,t)}{\sqrt{y-t}}\tau'(t)dt+\int_0^y\Phi_2(y,t)\tau(t)dt+\int_0^y K_{3x}(0,y,\eta)d\eta+P_2(y) \quad (13)$$

Исключая из (12) и (13) функцию $v(y)$,приходим к интегральному уравнению Вольтерра, оно имеет всегда единственное решение.

После определения $\tau(y)$ пользуясь условиям (6) и (7) получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $w_1(y), w_2(y)$. Полученная система имеет единственное решение в классе непрерывных функций.

<u>Задача2.</u> Требуется найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ (0\le x\le 1) \quad (14)$$

$$u(x,0)=\psi_2(x),\ (-1\le x\le 0) \quad (15)$$

$$u(1,y)=u(-1,y),\ (0\le y\le 1) \quad (16)$$

$$u_x(1,y)=u_x(-1,y),\ (0\le y\le 1) \quad (17)$$

и условиям склеивания $u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y)$

$$u_x(-0,y)=u(+0,y)=v(y)$$

<u>Задача3.</u> Требуется найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\lambda_1 u(x,1),\ (0\le x\le 1) \quad (18)$$

$$u(x,1)=\lambda_2 u(x,0),\ (-1\le x\le 0) \quad (19)$$

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\ (0\le y\le 1) \quad (20)$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ (0\le y\le 1) \quad (21)$$

$$u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ (0\le y\le 1) \quad (22)$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\ (0\le y\le 1) \quad (23)$$

и условиям склеивания $u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y)$

$$u_x(-0,y)=u(+0,y)=v(y)$$

Доказаны существование и единственность данных задач.

Литература:

1. Джураев Т.Д. – Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов. Ташкент, ФАН, 1979.
2. Arena O. On a degenerate elliptic-parabolic equation // Consilio Nazionale delle Riserche Centro di abalisi globale. Firenze, 1977.
3. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique // J. Math. Appl. 1913. T.9, sec. 6. P. 305-475; 1914. Ch. 4. P. 105-137.
4. Кумышев Р.М. О разрешимости краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения. научный журнал «ФӘн-наука», 2015. №4 (43). С. 6 – 8.
5. Кумышев Р.М., Сабанчиева А.А., Сурамова Ж.Х. О разрешимости нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности. В сборнике: ИННОВАЦИОННОЕ РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ Сборник статей Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Сукиасян А.А., 2015. С. 11 – 15.

Kumyshev R.M. O razreshimosti kraevyh zadach dlja parabolicheskogo uravnenija tret'ego porjadka s razryvnoj liniej perehoda // Nauka. Mysl'. - № 2. – 2016.

— • —

Abstract. The boundary value problem for the third order parabolic equation has been studied. The question on solvability at given conditions has been reduced to the investigation of systems of integral equations.

Keywords: regular equation, continuously – differentiable function, system of Voltair integral equations.

— • —

Сведения об авторах

Радион Музаринович **Кумышев**, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова.

— • —

Подписано в печать 15.02.2016.